CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XX-a, BĂILEȘTI, 29 MARTIE 2025

CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Rezultatul calculului $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ este

a) 3 **b) 4** **c) 14** **d) 40**

2. Multimea valorilor pentru care este definita expresia algebrica $\frac{\lg(2x-3)}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$ este:

a) $(\frac{3}{4}, 3)$ **b)** $(\frac{3}{2}, 3)$ **c)** $(2, \frac{3}{2})$ **d) (2, 3)**

3. Daca $x = \log_3 81 - 2\cdot\log_{\sqrt{3}} 3 + 4\cdot\log_{\frac{1}{9}} 27$, atunci x are valoarea:

a) 10 **b) –10** **c) 6** **d) – 6**

4. Se considera numarul complex $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2025} = a + ib$, unde a si b sunt numere reale. Valoarea numarului a + b este egala cu :

a) 0 **b)1** **c) 2** **d)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

5. Produsul solutiilor ecuatiei $5 \cdot 4^x - 11 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ este egal cu:

a) 5 **b) 1** **c) 10** **d) 0**

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, pentru orice numar real x.

a) Stabiliti daca functia f este injectiva.

b) Calculati f(1).

c) Calculati f(0).

Problema 2 (20 puncte)

Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$ astfel încât $2(a^2 + b^2) = c^2$. Demonstrați că:

$|a + b + c| + |a + b - c| = |-a + b + c| + |a - b + c|$

(*Gazeta Matematica 6-7-8 / 2021*)

Probleme propuse de: Ionuț Ivănescu, prof., C.N. „Ștefan Velovan”, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare si notare
Clasa a X- a

Partea I (50 puncte)

1) b **2) d** **3)** d **4) c** **5)** d

Partea a II – a (20 puncte + 20 puncte)

1) a) $f(f(0)) = f(f(1))$ ……...2p

Daca $f(0) = f(1)$, atunci f nu este functie injectiva...……1p

Daca $f(0) \neq f(1)$, notand $f(0) = a$ si $f(1) = b$, $a \neq b$, dar $f(a) = f(b)$ si deci f nu este injectiva.....2p

Asadar functia f nu este injectiva.....1p

a) In enunt, inlocuind pe x cu $1 \Rightarrow f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(f(f(1))) = f(1)$ (1) ……2p

In enunt, inlocuind pe x cu $f(1) \Rightarrow f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1$ (2)…… ……...2p

Din relatiile (1) si (2) $\Rightarrow f^2(1) - f(1) + 1 = f(1) \Rightarrow [f(1) - 1]^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$……....2p

b) In enunt, inlocuind pe x cu $f(0) \Rightarrow f(f(f(0))) = f^2(0) - f(0) + 1$ (3) ……2p

In enunt, inlocuind pe x cu $0 \Rightarrow f(f(0)) = 1 \Rightarrow f(f(f(0))) = f(1) = 1$ (4) ……..2p

Din relatiile (3) si (4) $\Rightarrow f^2(0) - f(0) + 1 = 1 \Rightarrow f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$……..2p

Daca $f(0) = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \Rightarrow 1 = 0$ – contradictie……1p

Deci $f(0) = 1$ ……...1p

2) Notam $u = |a + b + c| + |a + b - c|$ si $v = |-a + b + c| + |a - b + c|$ 2p

Conditia din enunt se mai scrie : $(a + b)^2 + (a - b)^2 = c^2$ 4p

Conform identitatii paralelogramului avem :

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_1|^2$, pentru orice numere complexe z_1 si z_2.....4p

Folosind aceasta identitate si tinand seama de (1) obtinem :

$u^2 = |(a + b) + c|^2 + |(a + b) - c|^2 + 2|(a + b)^2 - c^2| =$

$= 2|a + b|^2 + 2|c|^2 + 2|a - b|^2$ 4p

$v^2 = |c + (a - b)|^2 + |c - (a - b)|^2 + 2|c^2 - (a - b)^2| =$

$= 2|c|^2 + 2|a - b|^2 + 2|a + b|^2$ 4p

Deci $u^2 = v^2$ si cum u si v sunt numere reale nenegative $\Rightarrow u = v$ c.c.t.d. 2p